ج6: نعم هناك قاعدة محددة لمعرفة قاعدة الحلول لمعادلة تفاضلية إذا كانت المعادلة معادلة تفاضلية خطية ذات معاملات ثابتة وسنشرح ذلك بمحاضرات قادمة.

ج7: إذا كانت المعادلة التفاضلية الخطية المعطاة ذات معاملات متغيرة . لا يوجد قاعدة محددة لإيجاد قاعدة الحلول لكن لا بد لنا من إيجاد الحلول لمعادلات تفاضلية خطية ذات معاملات متغيرة والسبيل إلى ذلك هو أن نبحث عن بعض الحلول لهذه المعادلات وفق طرق التفتيش:

إذا كانت لدينا المعادلة التفاضلية

$$P_n(x)\cdot y^{(n)} + P_{n-1}(x)\cdot y^{(n-1)} + \dots + P_1(x)\cdot y' + P_0(x)\cdot y = 0 \qquad (I)$$

أولاً: تكون الدالة $y_1 = x$ حل خاص لهذه المعادلة إذا وفقط إذا كان $P_1(x) + xP_0(x) = 0$

ثانياً: تكون الدالة $y_1 = x^2$ حل خاص للمعادلة (I) إذا وفقط إذا كان:

$$\frac{2!}{0!}\cdot P_2(x) + \frac{2!}{1!}xP_1(x) + \frac{2!}{2!}x^2 P_0(x) = 0$$

ثالثاً: بشكل عام تكون الدالة $y = x^k$ حلاً خاصاً إذا وفقط إذا كان:

$$\frac{k!}{0!}P_k(x) + \frac{k!}{1!}xP_{k-1}(x) + \frac{k!}{2!}x^2 P_{k-2}(x) + \dots + \frac{k!}{k!}x^k P_0(x) = 0$$

رابعاً: تكون الدالة $y = e^{mx}$ حلاً خاصاً للمعادلة (I) إذا وفقط إذا كان:

$$P_n(x)\cdot m^n + P_{n-1}(x)\cdot m^{n-1} + \dots + P_1(x)\, m + P_0(x) = 0$$

نوجد جذور هذه المعادلة نحصل قيم $m$ التي تتعلق بالمتغير $x$ ونأخذ قيم الثابتة.

حالات خاصة: إذا كانت لدينا المعادلة التفاضلية $y''+p(x).y'+q(x).y=0$

تكون الدالة $y=x$ حل خاص إذا وفقط إذا كان $p(x)+x\,q(x)=0$

" " " " " " $y=x^k$ $k(k-1).x^{k-2}+k\,x^{k-1}p(x)+x^k q(x)=0$

تكون الدالة $y=e^{mx}$ حل خاص إذا وفقط إذا كان:

$M^2+p(x)M+q(x)=0$

تكون الدالة $y=\sin mx$ حل خاص إذا وفقط إذا كان:

$M\,p(x).\cos mx+(q(x)-m^2).\sin mx=0$

تكون الدالة $y=\cos mx$ حل خاص إذا وفقط إذا كان:

$-M\,p(x).\sin mx+(q(x)-M^2).\cos mx=0$

أمثلة: أوجد الحل العام للمعادلة:

$x\,y'''-y''-x\,y'+y=0$

لابد لنا من معرفة حلين خاصين لإيجاد الحل العام.

تكون الدالة $y_1=x$ حل خاص إذا وفقط إذا كان:

$p_1(x)+x\,p_0(x)=0$

$-x+x(1)=0 \Rightarrow 0=0$

تكون الدالة $y=x^2$ حل خاص إذا وفقط إذا كان:

$\frac{2!}{0!}p_2(x)+\frac{2!}{1!}x\,p_1(x)+\frac{2!}{2!}.x^2.p_0(x)=0$

$2(-1)+2x(-x)+x^2\,1=0$

$-2-2x^2+x^2\neq 0$ ليست حلا

تكون الدالة $y=e^x$ حل خاص إذا وفقط إذا كان:

$x.M^3-M^2-xM+1=0$



$xM(M^2-1)\quad -(M^2-1)$

$$xM(M^2-1) - (M^2-1) = 0$$

$$(M^2-1)(xM-1) = 0$$

إما $xM - 1 = 0 \Leftarrow M = \frac{1}{x}$ مرفوض

وإما $M^2 - 1 = 0 \Leftarrow M = 1$ و $M = -1$

أي أن كلاً من $y_2 = e^x$ و $y_3 = e^{-x}$ هي حلول خاصة للمعادلة المعطاة

وبما أن

$$w(x, e^x, e^{-x}) = \begin{vmatrix} x & e^x & e^{-x} \\ 1 & e^x & -e^{-x} \\ 0 & e^x & e^{-x} \end{vmatrix} \neq 0$$

عندئذٍ الحل العام للمعادلة المعطاة يكون :

$$y_h = A_1 x + A_2 e^x + A_3 e^{-x}$$

---

إذا أعطانا معادلة ذات معاملات متغيرة وطلب إيجاد الحل العام ولم يعطنا الحل الخاص فلابد من استخدام طرق التفتيش

مثال: أوجد الحل العام للمعادلة

$$(2x+1)y'' + 4xy' - 4y = 0$$

الحل:

تكون الدالة $y = x$ حل خاص إذا وفقط إذا كان :

$$P_1(x) + x P_0(x) = 0$$

$$4x - 4x = 0 \Rightarrow 0 = 0 \quad \text{حل}$$

لإيجاد الحل العام $y = y_1 \int u \, dx$ أو $y = y_1 \cdot$ ... أو $y_h = y_1 \left[ \int c_1 \frac{e^{-\int P_1(x)dx}}{y_1^2} dx + c_2 \right]$

وبالتالي الحل العام للمعادلة المعطاة وفق علاقة ليوفيل يكون :

ط1 :

$$y_h = x \left[ \int c_1 \frac{e^{-\int \frac{4x}{2x+1}}}{x^2} dx + c_2 \right]$$

$$\int \frac{4x}{2x+1} dx = \int 2 - \frac{2}{2x+1} dx = 2x - \ln(2x+1)$$

$$2x+1 \overline{) \, 4x \,} \quad 2 \qquad \mp 4x \mp 2 \qquad 0 - 2$$

وبالتالي فإن :

$$y_h = x \left[ \int c_1 \frac{e^{-2x + \ln(2x+1)}}{x^2} dx + c_2 \right]$$

$$y_h = x\left[c_1\int \frac{(2x+1)\cdot e^{-2x}}{x^2}\,dx + c_2\right] =$$

$$= x\left[2c_1\int \frac{e^{-2x}}{x} + c_1\int \frac{e^{-2x}}{x^2}\,dx + c_2\right] \quad \boxed{*}$$

بالتجزئة

لنحسب قيمة التكامل: $\int \frac{e^{-2x}}{x^2}\,dx$

نفرض أن $u = e^{-2x} \Rightarrow -2e^{-2x}dx = du$

$\frac{dx}{x^2} = dv \Rightarrow -\frac{1}{x} = v$

$I = u\cdot v - \int v\,du$

$$I = -\frac{1}{x}\cdot e^{-2x} - \int -\frac{1}{x}(-2\cdot e^{-2x})\,dx = -\frac{e^{-2x}}{x} - 2\int \frac{e^{-2x}}{x}\,dx$$

نعوض في $\boxed{*}$:

$$= x\left[2c_1\left(-\frac{e^{2x}}{x}\right) + c_2\right]$$

$$= c_0\cdot e^{-2x} + c_2 x \quad ; \quad c_0 = -2c_1$$

**ط2:** تكون الدالة $y = e^{Mx}$ حل خاص إذا وفقط إذا كان:

$$(2x+1)M^2 + 4xM - 4 = 0$$

$$2xM^2 + 4xM + M^2 - 4 = 0$$

$$2xM(M+2) + (M+2)(M-2) = 0$$

$$(M+2)(2xM + (M-2)) = 0$$

إما: $M = \frac{2}{2x+1}$ مرفوض

وإما $M+2 = 0 \Rightarrow M = -2$ أي أن الدالة $y_2 = e^{-2M}$ حل وبما أن:

$$W(x, e^{-2x}) = \begin{vmatrix} x & e^{-2x} \\ 1 & -2e^{-2x} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$y_h = A_1 x + A_2\cdot e^{-2x}$$

★ في بعض المراجع يطلب ما يلي إيجاد حل عام لمعادلة تفاضلية معطاة ويذكر بعد المعادلة العبارة الآتية: إذا علمت أن للمعادلة الخطية المتجانسة حلول خاصة على هيئة كثيرات حدود. لإيجاد الحل نتبع الخطوات:

١- نفرض: حلاً من الشكل

$$y = x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1(x) + a_0$$

حيث $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ ثوابت عددية.

٢- نشتق هذا الفرض عدد من المرات يساوي رتبة المعادلة المعطاة.

٣- نعوض $y, y'$ والمشتقات العليا بالمعادلة التفاضلية المعطاة.

ملاحظة: نهتم فقط بالحد ذو الأس الأعلى في جميع الحدود ونهمل الباقي ثم نرتبا الحدود وفق تناقص قوى $x$ = ٥ ونطابق معامل الحد ذو الأس الأعلى بالصفر.

- نحصل على معادلة جبرية المتغير فيها $n$ نوجد جذور هذه المعادلة جبرية نهتم فقط بالقيم الموجبة ونهمل جميع القيم السالبة باستثناء $n=-1$ نفرض أن $y = \frac{1}{x}$
- إذا كانت $n=1$ نفرض أن $y = x+A$ نشتق هذا الفرض ونعوض في المعادلة التفاضلية المعطاة ونطابق لتحديد قيمة $A$.
- إما $n=2$ نفرض أن $y = x^2+Bx+c$ نشتق ونعوض ونطابق فنحصل بنتيجة المطابقة بمعادلتين ومجهولين هما $B, c$ بحلها نعم قيمتا $B, c$.
- إذا كان $n=3$ نفرض أن $y = x^3+Ax^2+Bx+c$ نشتق ونعوض ونطابق فنحصل على ثلاث معادلات بثلاث مجاهيل $A, B, c$ بحلها نحصل على قيم $A, B, c$:

مثال ٢: أوجد الحل العام للمعادلة: $(3x+2x^2)y'' - 6(1+x)y' + 6y = 0$

أوجد الحل العام لهذه المعادلة إذا علمت أن المعادلة المتجانسة المناظرة تملك حل خاص على هيئة كثيرات حدود؟

**الحل:** نفرض أن: $y = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ___ + a_1 x^1 + a_0 x^0$

حيث $a_0, a_1, __ a_{n-1}$ ثوابت عددية حقيقية:

نشتق مرتين متتاليتين:

$$y' = n \cdot x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + ___ + 2a_2 x + a_1$$

نهتم بالحد ذو الأس الأعلى $y'' = n(n-1) x^{n-2} + ___$

نعوض $y'$ و $y''$ بالمعادلة تفاضلية:

$$2n(n-1) \cdot x^n + ___ - 6n x^n + 6x^n = 0$$

$$(2n^2 - 8n + 6) x^n + ___ = 0$$

بالمطابقة نجد أن

$$2n^2 - 8n + 6 = 0 \Rightarrow n^2 - 4n + 3 = 0$$

$$(n-1)(n-3) = 0$$

إما $n = 1$

أو $n = 3$

من أجل $n=1$ نفرض أن $y = x + B$

نشتق فنجد أن $y' = 1$ , $y'' = 0$ ومنه التعويض نجد أن:

$$-6(1+x) \cdot 1 + 6(x+B) = 0$$

$$-6 - 6x + 6x + 6B = 0$$

$$6B = 6 \Rightarrow B = 1$$

$y_1 = x + 1$ حل خاص

من أجل $n = 3$ نفرض أن $y = x^3 + Bx^2 + Cx + A$

$$y' = 3x^2 + 2Bx + C$$

$$y'' = 6x + 2B$$

$$(3x + 2x^2)(6x + 2B) - 6(1+x)(3x^2 + 2Bx + C) + 6(x^3 + Bx^2 + Cx + A)$$

$$18x^2 + 6Bx + 12x^3 + 4x^2B - 18x^2 - 12Bx - 6 - 18x^3 - 12x^2B - 6Cx$$

$$+ 6x^3 + 6Bx^2 + 6Cx + 6A$$

$$-2BX^2-6BX-6C+6A=0$$

$$\left.\begin{matrix}-2B=0\\-6B=0\end{matrix}\right\} \Rightarrow B=0$$

$$+6A-6C=0$$

لها عدد غير منته من الحلول $A=C$

وبالتالي فإن :

$$y_2=X^3+AX+A \quad . A=0 \text{ نفرض}$$

ومنه فإن الحل العام للمعادلة المتجانسة المناظرة .

$$y=C_1y_1+C_2y_2 \Rightarrow C_1(X+1)+C_3X^3+A(X+1)C_1$$

$$y_h=C_2(X+1)+C_3X^3 \quad \text{إذ } \boxed{C_2=C_1+A}$$

$$y_1=X+1 \;;\quad y_2=X^3$$

$$y_p=y_1\int\frac{w_1}{w}dx+y_2\int\frac{w_2}{w}dx$$

~~w (x+1, x^3)~~

---

ملاحظة : إذا كان $n=-1$ أي الدالة $y=\frac{1}{x}$ ليست حلاً

نوجد الحل العام من أجل القيمة الثانية أي من أجل $n=2$ نوجد الحل $y$ بعد ذلك نستخدم إحدى الطرق الثلاثة :

1- $y=y_1\int u\,dx$

2- $y=y_1\cdot u$

3- $y_h=y_1\left[\int\frac{C_1\cdot e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2}dx+C_2\right]$